THE ANALYSIS AND CONTROL OF SATURATE STATIC MAGNETIC FIELDS

Lin Xiao-biao

Abstract

We consider two basic problems in the analysis of static magnetic fields. 1) Find the distribution of a magnetic field when the distribution of the electric current is given. 2) Given the distribution of a magnetic field, find the distribution of the electric current in the set of admissible distributions such that the corresponding magnetic field is closest to the given one.

Since $\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}$, we set $\boldsymbol{H}=\nabla\varphi+\boldsymbol{h}$, where $\boldsymbol{h}$ is any solution of the equation $\operatorname{rot}\boldsymbol{h}=\boldsymbol{j}$. we calculate the static magnetic field by solving the boundary value Problem: Find $\varphi\in H^1(\Omega)$ such that

$$\begin{cases}\operatorname{div}[\mu(x,|\nabla\varphi+\boldsymbol{h}|^2)(\nabla\varphi+\boldsymbol{h})]=0 \quad x\in\Omega, & (1)\\ \mu(x,|\nabla\varphi+\boldsymbol{h}|^2)(\nabla\varphi+\boldsymbol{h})\cdot\boldsymbol{n}=0 \quad x\in\partial\Omega, & (2)\\ \int_\Omega\varphi dx=0, & (3)\end{cases}$$

where $\boldsymbol{h}\in[L^2(\Omega)]^3$ is given.

In the first part of this paper, we prove, by variational method, that if B is a strictly increasing function of H, the solution of the boundary value problem exists and is unique and that if $dB/dH\geqslant\varepsilon>0$, the sequence of approximate solutions strongly converges to the real solution.

The second part of this paper treats of the inverse problem, i.e., the control problem. Let $\mathscr{U}$ be a closed, convex, bounded set in $[L^2(\Omega)]^3$, such that $\boldsymbol{j}\in\mathscr{U}$ implies $\operatorname{div}\boldsymbol{j}=0$. $\mathscr{U}$ is called the set of admissible controls. The state equations are (1)～(3). The cost functional is

$$I(\nabla\varphi+\boldsymbol{h})=\|\nabla\varphi+\boldsymbol{h}-\boldsymbol{H}_0\|_{[L^2(\Omega)]^3},$$

where $\boldsymbol{H}_0\in[L^2(\Omega)]^3$ is given.

Extending $\boldsymbol{j}\in\mathscr{U}$ to $[L^2(\Omega)]^3$ linearly and continuously and considering a set of auxiliary Laplace equations, we discuss the operator rot: $[H^1(\Omega)]^3\to[L^2(\Omega)]^3$ in detail. Let N_0 be the null space of rot. The operator rot induces an isomorphic mapping: $[H^1(\Omega)]^3/N_0\to[L^2(\Omega)]^3$. Besides, by using the coercive inequality, we prove that the solution $\Phi(h)$ of equations (1)～(3) is a continuous mapping: $[L^2(\Omega)]^3\to H^1(\Omega)$. Hence, the Cobolev embedding theorem ensures the existence of the optimal control.

By the finite elements method, numerical approximation of the boundary value problem and control problem are discussed in the last part of the paper. It is shown that the approximate solutions of the boundary value problem strongly converge to the real solution and that the control problem can be separated into optimization problems in the finite-dimensional spaces.

饱和静磁场的计算和控制问题

林　晓　标

在恒稳电流作用下铁磁体所产生的静磁场的分析，对于电机、变压器、加速器的设计有重要的意义．在磁场强度很大的情况下，铁磁物质产生饱和现象，导磁系数依赖于磁场强度，因此要准确地计算磁场必须考虑非线性的微分方程．本文讨论两个基本问题：1)给定了电流的分布求磁场分布；2)给定了磁场的分布，在允许的电流分布的集合中找出一种电流分布，使产生的磁场与给定的最接近．

§1. 边值问题

静磁场的基本方程是

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}. \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 是磁感应强度，$\boldsymbol{H}$ 是磁场强度，$\boldsymbol{j}$ 是电流密度，$\mu = \mu(x, |\boldsymbol{H}|^2)$ 是导磁系数．设所考虑的区域是有界开集 $\Omega \subset \boldsymbol{R}^3$，具有光滑的边界，在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上，磁力线无外漏，即 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0$，$\boldsymbol{n}$ 表示外法向单位向量．假设 $\mu = \mu(x, \xi)$ 定义于 $\overline{\Omega} \times R_+$ 上，其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \overline{\Omega}$，$\xi \in R_+ = [0, +\infty)$，它关于每个固定的 ξ 是 $\boldsymbol{x}$ 的可测函数，对几乎每个 $\boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}$ 都是 ξ 的 C^∞ 函数，并且满足

$$0 < \mu_0 \leqslant \mu \leqslant \mu_1, \tag{4}$$

这里 μ_0，μ_1 是常数．记

$$[L^2(\Omega)]^3 = \{\boldsymbol{H}(x) \mid \boldsymbol{H} = (H_1, H_2, H_3),\ H_i \in L^2(\Omega),\ i = 1, 2, 3\},$$

引入内积 $(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2) = \int_\Omega \boldsymbol{H}_1 \cdot \boldsymbol{H}_2 \, dx$ 后，$[L^2(\Omega)]^3$ 成为 Hilbert 空间．我们今后设 $\boldsymbol{B} \in [L^2(\Omega)]^3$，$\boldsymbol{H} \in [L^2(\Omega)]^3$，$\boldsymbol{j} \in [L^2(\Omega)]^3$．不失一般性，我们设 $\boldsymbol{j}$ 可以线性有界地延拓至 Ω 外，成为 $[L^2(R^3)]^3$ 中元素，具有紧致支集 D，且在 R^3 中成立着

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0. \tag{5}$$

这可以这样来做：

设 Ω_1 是有界开区域，具有光滑的边界，且 $\overline{\Omega} \subset \Omega_1$，我们在 Ω_1/Ω 中解 Neumann 问题：

本文 1980 年 4 月 8 日收到．

$$\begin{cases}\Delta W=0, & \text{在 } \Omega_1/\Omega \text{ 中,}\\ \dfrac{\partial W}{\partial n}=-\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上,}\\ \dfrac{\partial W}{\partial n}=0, & \text{在 } \partial\Omega_1 \text{ 上.}\end{cases}$$

由于 $\operatorname{div}\boldsymbol{j}=0$，故 $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}\in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$，见[2]．又$\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}d\Gamma=0$，由此知该问题的解是存在的．我们在 Ω_1/Ω 中令 $\boldsymbol{j}=\nabla W$，在 Ω_1 外令 $\boldsymbol{j}=0$，就可以把 $\boldsymbol{j}$ 延拓到 $[L^2(R^3)]^3$ 上，且支集在 Ω_1 上，$\operatorname{div}\boldsymbol{j}=0$ 在 R^3 中成立．显见延拓算子T线性有界

$$\|T\boldsymbol{j}\|_{[L^2(R^3)]^3}\leqslant C\|\boldsymbol{j}\|_{[L^2(\Omega)]^3}.$$

假设D属于区域 $\{0<x,\ 0<z,\ 0<z\}$，定义

$$h_1=\int_0^z j_2(x,\ y,\ z)dz,\ h_2=-\int_0^z j_1(x,\ y,\ z)dz,\ h_3=0. \tag{6}$$

易知 $\boldsymbol{h}\in[L^2(\Omega)]^3$．(6)式规定了 $[L^2(\Omega)]^3$ 到自身线性连续映照，记为 $\boldsymbol{h}=P\boldsymbol{j}$．用广义函数的理论易证

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{h}=\operatorname{rot}P\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}.$$

由(2)，$\operatorname{rot}(\boldsymbol{H}-\boldsymbol{h})=0$，从而我们可以设 $\boldsymbol{H}-\boldsymbol{h}=\nabla\varphi$，$\varphi\in H^1(\Omega)$．把

$$\boldsymbol{H}=\nabla\varphi+h$$

代入(1)，考虑到 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega}=0$，得到边值问题：

给定 $\boldsymbol{h}\in[L^2(\Omega)]^3$，寻求 $\varphi\in H^1(\Omega)$ 适合

$$\begin{cases}\operatorname{div}[\mu(x,|\nabla\varphi+\boldsymbol{h}|^2)(\nabla\varphi+\boldsymbol{h})]=0, & x\in\Omega,\\ \mu(x,|\nabla\varphi+\boldsymbol{h}|^2)(\nabla\varphi+\boldsymbol{h})\cdot\boldsymbol{n}=0, & x\in\partial\Omega,\\ \int_\Omega\varphi\,dx=0.\end{cases} \tag{7}$$

这样，我们把问题归结为求解 Ω 上函数 $\varphi(x)$，适合(7)．这称为数量势方法．若设 $\boldsymbol{B}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{H}=\nu\boldsymbol{B}$，其中 $\nu=\dfrac{1}{\mu}$，也可以把问题归结为在 Ω 上求解向量 $\boldsymbol{A}=(A_1(x),\ A_2(x),\ A_3(x))$，称为向量势方法．[1]在 ν 是 $|\boldsymbol{B}|$ 的单调上升函数的假定下讨论了向量势方法．我们讨论数量势方法的困难在于不能假定 $\mu(x,\ \xi)$ 是 ξ 的上升函数，因此需要作更仔细的计算．

设 $\psi(x,\ \xi)$，$\eta(x,\ \xi)$ 均定义于 $\bar\Omega\times R_+$ 上

$$\psi(x,\ \xi)=\int_0^\xi\mu(x,\ \xi)d\xi,$$

$$\eta(x,\ \xi^2)=\mu(x,\ \xi^2)\cdot\xi.$$

今后，我们假设 $\eta(x,\ \xi)$ 是 ξ 的单调上升函数，或$\dfrac{d\eta}{d\xi}\geqslant\zeta_0>0$．下面把边值问题归结为变分极值问题．对于 Ω 上的正值可测函数 $u(x)$，$\mu(x,\ u(x))$ 是有界可测函数．若 $u(x)$ 是可积的，则 $\psi((x,\ u(x))$亦可积．我们定义 $[L^2(\Omega)]^3$ 上的泛函

$$J(\boldsymbol{H})=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\psi(x,\ |\boldsymbol{H}|^2)dx. \tag{8}$$

设 $\widetilde{H}^1(\Omega)$ 为

$$\widetilde{H}^1(\Omega)=\left\{\varphi\,|\,\varphi\in H^1(\Omega),\int_{\Omega}\varphi\,dx=0\right\},$$

它是 $H^1(\Omega)$ 的闭子空间．如果重新赋以内积 $(u,\ v)_{\widetilde{H}^1(\Omega)}=\int_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla v dx$，根据不等式

$$\int_{\Omega}u^2dx\leqslant C_1\int_{\Omega}|\nabla v|^2dx+C_2\left(\int_{\Omega}udx\right)^2,$$

知 $\widetilde{H}^1(\Omega)$ 中元素 u 的两种范数 $\|u\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)}$ 与 $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ 是等价的，所以 $\widetilde{H}^1(\Omega)$ 是 Hilbert 空间．显然 $\|\varphi\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)}=\|\nabla\varphi\|_{[L^2(\Omega)]^3}$.

在 $\widetilde{H}^1(\Omega)$ 中考虑泛函

$$\widetilde{J}(\varphi)=J(\nabla\varphi+\boldsymbol{h}), \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{h}$ 是 $[L^2(\Omega)]^3$ 中固定的元素．

我们的变分问题是：对固定的 $\boldsymbol{h}\in[L^2(\Omega)]^3$，找出 $u\in\widetilde{H}^1(\Omega)$ 使

$$\widetilde{J}(u)=\inf_{v\in\widetilde{H}^1(\Omega)}\widetilde{J}(v). \tag{10}$$

定理 1 变分问题的解是边值问题(7)的解；若 $\widetilde{J}(u)$ 是凸泛函，那么边值问题的解也是变分问题的解．

证 显然 $\widetilde{J}'(u)$ 存在，且对 $u,\ v\in\widetilde{H}^1(\Omega)$ 成立着

$$\langle\widetilde{J}'(u),v\rangle=\int_{\Omega}\mu(x,|\nabla u+\boldsymbol{h}|^2)(\nabla u+\boldsymbol{h})\cdot\nabla v\,dx. \tag{11}$$

设 $u\in\widetilde{H}^1(\Omega)$ 是极值函数，即 $\widetilde{J}(u)=\inf\limits_{v\in\widetilde{H}^1(\Omega)}\widetilde{J}(v)$，那么对一切 $v\in\widetilde{H}^1(\Omega)$，成立着

$$\langle\widetilde{J}'(u),\ v\rangle=0, \tag{12}$$

它对 $H^1(\Omega)$ 中的 v 也成立．令 $v\in C_c^\infty(\Omega)$，得

$$\int_{\Omega}\{\nabla\cdot\mu(|\nabla u+\boldsymbol{h}|^2)(\nabla u+\boldsymbol{h})\}vdx=0,\ \forall v\in C_c^\infty(\Omega), \tag{13}$$

此即(7)的第一式．以 $v\in H^1(\Omega)$ 乘(7)的第一式，由格林公式[2]，

$$\int_{\Omega}\{\nabla\cdot\mu(|\nabla u+h|^2)(\nabla u+\boldsymbol{h}\}\,vdx+\int_{\Omega}\nabla v\cdot[\mu(|\nabla u+\boldsymbol{h}|^2)(\nabla u+\boldsymbol{h})]dx$$
$$=\int_{\partial\Omega}\{\mu(|\nabla u+\boldsymbol{h}|^2)(\nabla u+\boldsymbol{h})\cdot\boldsymbol{n}\}vd\Gamma.$$

由(12)和(13)得

$$\int_{\Omega}\{\mu(|\nabla u+\boldsymbol{h}|^2)(\nabla u+h)\cdot\boldsymbol{n}\}vd\Gamma=0,$$

因 $v(x)\to v(x)|_{\partial\Omega}$ 是 $H^1(\Omega)$ 到 $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 上的映照，故在 $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 中

$$\mu(x,|\nabla u+\boldsymbol{h}|^2)(\nabla u+h)\cdot\boldsymbol{n}=0,$$

此即(7)的第二式．$\widetilde{H}^1(\Omega)$ 中的元素自然适合(7)的第三式．反之，设 u 是(7)的解，易知 $\langle\widetilde{J}'(u),v\rangle=0$ 对一切 $v\in\widetilde{H}^1(\Omega)$ 成立．因为 $\widetilde{J}(u)$ 是凸的，所以

$$\tilde{J}(u+v)-\tilde{J}(u)\geqslant\langle\tilde{J}'(u),\ v\rangle=0,\ \forall v\in\tilde{H}^1(\Omega),$$

从而

$$\tilde{J}(u)=\inf_{v\in\tilde{H}^1(\Omega)}\tilde{J}(v).$$

泛函 $\tilde{J}(\varphi)$ 显然有下界，且 $\|\varphi\|_{\tilde{H}^1(\Omega)}\to+\infty$ 时，$\tilde{J}(\varphi)\to+\infty$. 因此存在“最小序列” $\{\varphi_n\}$，使 $\lim\tilde{J}(\varphi_n)=\inf\limits_{\phi\in\tilde{H}^1(\Omega)}\tilde{J}(\varphi)$，为了证明变分问题的解是存在、唯一的，我们对 $\tilde{J}(\varphi)$ 的凸性作一些讨论.

命题1　当 $\eta(x,\ \xi)$ 是 ξ 的严格上升函数时，$\tilde{J}(\varphi)$ 是严格凸的.

证　只要证 $J'(\boldsymbol{H})$ 是严格单调算子. 先证 $J'(\boldsymbol{H})$ 单调. 任给 $\boldsymbol{H}_1,\boldsymbol{H}_2\in[L^2(\Omega)]^3$，因为 $\langle J'(\boldsymbol{H}_1),\boldsymbol{H}_2\rangle=\int_\Omega\mu(x,\ |\boldsymbol{H}_1|^2)\boldsymbol{H}_1\cdot\boldsymbol{H}_2dx$，只要证

$$(\mu(x,|\boldsymbol{H}_1|^2)\boldsymbol{H}_1-\mu(x,\ |\boldsymbol{H}_2|^2)\boldsymbol{H}_2)\cdot(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)\geqslant0,\tag{14}$$

即

$$\mu(x,|H_1|^2)|\boldsymbol{H}_1|^2+\mu(x,|\boldsymbol{H}_2|^2)|\boldsymbol{H}_2|^2\geqslant(\mu(x,|\boldsymbol{H}_1|^2)+\mu(x,|\boldsymbol{H}_2|^2))(\boldsymbol{H}_1\cdot\boldsymbol{H}_2).$$

为书写方便，简记 $\mu(x,|\boldsymbol{H}|^2)$ 为 $\mu(|\boldsymbol{H}|^2)$. 因为

$$\boldsymbol{H}_1\cdot\boldsymbol{H}_2\leqslant|\boldsymbol{H}_1||\boldsymbol{H}_2|,\tag{15}$$

只要能证

$$\mu(|\boldsymbol{H}_1|^2)|\boldsymbol{H}_1|^2+\mu(|\boldsymbol{H}_2|^2)|\boldsymbol{H}_2|^2\geqslant[\mu(|\boldsymbol{H}_1)^2)+\mu(|\boldsymbol{H}_2|^2)]|\boldsymbol{H}_1||\boldsymbol{H}_2|\tag{16}$$

就可以了. (16)等价于

$$\mu(|\boldsymbol{H}_1|^2)|\boldsymbol{H}_1|(|\boldsymbol{H}_1|-|\boldsymbol{H}_2|)\geqslant\mu(|\mathrm{H}_2|^2)|\mathrm{H}_2|(|\boldsymbol{H}_1|-|\boldsymbol{H}_2|),\tag{17}$$

如果 $|\boldsymbol{H}_1|=|\boldsymbol{H}_2|$，则上式显然成立. 如果 $|\boldsymbol{H}_1|>|\boldsymbol{H}_2|$，两端除以 $|\boldsymbol{H}_1|-|\boldsymbol{H}_2|$ 就得

$$\eta(|\boldsymbol{H}_1|^2)\geqslant\eta(|\boldsymbol{H}_2|^2).\tag{18}$$

因此，当 $\eta(x,\ \xi)$ 是 ξ 上升函数时，$J'(\boldsymbol{H})$ 是单调算子. 再证 $J'(\boldsymbol{H})$ 严格单调. 否则必有 $\boldsymbol{H}_1,\ \boldsymbol{H}_2\in[L^2(\Omega)]^3$，$\boldsymbol{H}_1\neq\boldsymbol{H}_2$，使(14)和(16)几乎处处成为等式，从而(15)几乎处处是等式，因此，$\boldsymbol{H}_1,\ \boldsymbol{H}_2$ 几乎处处方向相同. 再证 $|\boldsymbol{H}_1|=|\boldsymbol{H}_2|$ 几乎处处成立. 因为当 $|\boldsymbol{H}_1|>|\boldsymbol{H}_2|$ 时，(14)成为不等式，于是 $|\boldsymbol{H}_1|=|\boldsymbol{H}_2|$ 几乎处处成立. 这样，$\boldsymbol{H}_1(x)$ 几乎处处等于 $\boldsymbol{H}_2(x)$，得矛盾. 于是 $J'(\boldsymbol{H})$ 严格单调，$J(\boldsymbol{H})$ 严格凸，即得 $\tilde{J}(\varphi)$ 严格凸.

由[3]中的定理，知成立以下的定理.

定理2　设 $\eta(x,\ \xi)$ 是 ξ 的严格增函数，则变分问题(10)的解存在且唯一.

如果 $F(x)$ 是 Hilbert 空间 X 上的泛函，且存在常数 $k>0$，使得

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right)+k\|x-y\|^2\leqslant\frac{F(x)+F(y)}{2},\qquad\forall x,\ y\in X,$$

我们称 $F(x)$ 是均匀凸泛函. 用类似于从平行四边形定理导出投影定理的方法，易证：

引理1　Hilbert 空间X中关于强拓扑下半连续的均匀凸泛函 $F(x)$ 若有下界，则下确界必能达到. 若 $F(u)=\inf\limits_{v\in X}F(v)$，则最小化序列强收敛于 u.

命题2　设 ζ_0 是正的常数，$\dfrac{\partial\eta(x,\xi^2)}{\partial\xi}\geqslant\zeta_0>0$ 在 Ω 中几乎处处成立，则 $\tilde{J}(\varphi)$ 是均

匀凸泛函.

证 设 $\psi(x,|\boldsymbol{H}_1+t(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)|^2)=\Psi(t)$，其中 $0\leqslant t\leqslant 1$. 把 $|\boldsymbol{H}_1+t(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)|^2$ 简记为 θ^2，这时

$$\psi(|\boldsymbol{H}_2|^2)-\psi(\boldsymbol{H}_1|^2)=\Psi(1)-\Psi(0)=\Psi'(0)+\frac{1}{2}\Psi''(\zeta),\ (0<\zeta<1), \tag{19}$$

而

$$\Psi'(t)=2\mu(\theta^2)(\boldsymbol{H}_1+t(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1))\cdot(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1), \tag{20}$$

$$\Psi''(t)=4\frac{\partial\mu(\theta^2)}{\partial(\theta^2)}((\boldsymbol{H}_1+t(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1))\cdot(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1))^2+2\mu(\theta^2)|\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1|^2.$$

若 $\frac{\partial\mu(\theta^2)}{\partial(\theta^2)}\geqslant 0$，则

$$\Psi''(t)\geqslant 2\mu_0|\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1|^2. \tag{21}$$

若 $\frac{\partial\mu(\theta^2)}{\partial(\theta^2)}<0$，则

$$\begin{aligned}\Psi''(t)&\geqslant 4\frac{\partial\mu(\theta^2)}{\partial(\theta^2)}|\boldsymbol{H}_1+t(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)|^2|\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1|^2+2\mu(\theta^2)|\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1|^2\\&=2\left\{\frac{\partial\mu(\theta^2)}{\partial\theta}|\boldsymbol{H}_1+t(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)|+\mu(\theta^2)\right\}|\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1|^2\\&=2\frac{\partial[\mu(\theta^2)\cdot\theta]}{\partial\theta}|\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1|^2\\&=2\frac{\partial\eta(\theta^2)}{\partial\theta}|\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1|^2\geqslant 2\zeta_0|\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1|^2.\end{aligned} \tag{22}$$

由(21)，(22)知

$$\Psi''(t)\geqslant 2\min(\mu_0,\ \zeta_0)|\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1|^2. \tag{23}$$

把(20)，(23)代入(19)，并在 Ω 上积分，得

$$J(\boldsymbol{H}_2)-J(\boldsymbol{H}_1)\geqslant\langle J'(\boldsymbol{H}_1),\ \boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1\rangle+\frac{\min(\mu_0,\zeta_0)}{2}\|\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1\|^2_{[L^2(\Omega)]^3},$$

故

$$J(\boldsymbol{H}_1)-J\left(\frac{\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2}{2}\right)\geqslant\left\langle J'\left(\frac{\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2}{2}\right),\frac{\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2}{2}\right\rangle+\frac{\min(\mu_0,\zeta_0)}{2}\left\|\frac{\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2}{2}\right\|^2,$$

$$J(\boldsymbol{H}_2)-J\left(\frac{\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2}{2}\right)\geqslant\left\langle J'\left(\frac{\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2}{2}\right),\frac{\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1}{2}\right\rangle+\frac{\min(\mu_0,\zeta_0)}{2}\left\|\frac{\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1}{2}\right\|^2,$$

相加得

$$\frac{J(\boldsymbol{H}_1)+J(\boldsymbol{H}_2)}{2}-J\left(\frac{\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2}{2}\right)\geqslant\frac{\min(\mu_0,\zeta_0)}{8}\|\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2\|^2.$$

由 $J(\boldsymbol{H})$ 均匀凸立刻推出 $\tilde{J}(\varphi)$ 均匀凸. 证毕

注 若不顾物理上的事实设 $\mu(x,\xi)$ 是 ξ 的上升函数时，由(21)得 $J(\boldsymbol{H})$ 均匀凸. 这时亦成立 $\frac{\partial\eta(x,\ \xi^2)}{\partial\xi}\geqslant\mu_0>0$. 因此我们的条件是推广了[1]的条件，从而使数量势方法的适定性得以证明.

§2. 最优控制问题

设 $\bar{\Omega}\subset\{0<x,\ 0<y,\ 0<z\}$，$\mu(x,\xi)$ 适合命题2的假定.

状态方程：$\nabla\cdot\{\mu(|\nabla\varphi+h|^2)(\nabla\varphi+h)\}=0$，$\varphi\in\widetilde{H}^1(\Omega)$，

其中 $\boldsymbol{h}=P\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{j}\in\mathscr{U}$. $\mathscr{U}$ 是 $[L^2(\Omega)]^3$ 中有界闭凸集，且当 $\boldsymbol{j}\in\mathscr{U}$ 时 $\operatorname{div}\boldsymbol{j}=0$. 我们称 $\mathscr{U}$ 是允许控制集合.

例如，给定闭集 $K\subset\Omega$，物理上相当于线圈所占的允许空间，给定最大电流密度 c，$\mathscr{U}$ 可以是

$$\mathscr{U}=\{\boldsymbol{j}\,|\,\boldsymbol{j}\in[L^2(\Omega)]^3,\ \operatorname{ess\,sup}|\boldsymbol{j}|\leqslant c,\ \operatorname{supp}\boldsymbol{j}\subset K,\ \operatorname{div}\boldsymbol{j}=0\}.$$

最优控制问题：对于给定的 $\boldsymbol{H}_0\in[L^2(\Omega)]^3$，求 $\boldsymbol{j}\in\mathscr{U}$ 使目标泛函

$$I(\nabla\varphi+\boldsymbol{h})=\|\nabla\varphi+\boldsymbol{h}-\boldsymbol{H}_0\|_{[L^2(\Omega)]^3}$$

取最小值.

定理3　在命题2的假设下,最优控制问题的解存在.

证　设状态方程的解为 $\varphi=\Phi(\boldsymbol{h})$. $\boldsymbol{j}$ 取遍 $\mathscr{U}$ 时，$\nabla\Phi(P\boldsymbol{j})+P\boldsymbol{j}$ 构成集合 R. 若能证明 R 是 $[L^2(\Omega)]^3$ 中紧集,那么最优控制的存在性得证. 记

$$L=\{\boldsymbol{j}\,|\,\boldsymbol{j}\in[L^2(\Omega)]^3,\ \operatorname{div}\boldsymbol{j}=0\}.$$

L 是 $[L^2(\Omega)]^3$ 的闭子空间，带诱导拓扑. $\operatorname{rot}\boldsymbol{h}=\boldsymbol{j}$ 是 $[H^1(\Omega)]^3$ 到 L 中的线性连续映照. 若把 $[H^1(\Omega)]^3$ 中 rot 算子的零空间记为

$$N_0=\operatorname{Null}(\operatorname{rot}),$$

取商空间

$$G=[H^1(\Omega)]^3/N_0,$$

视 rot 为 $G\to L$ 线性连续映照,我们能证明映照是到上的,因而是 $G\to L$ 的同构对应. 我们设 T 是 $[L^2(\Omega)]^3$ 到 $[L^2(R^3)]^3$ 的延拓算子，它的定义如 §1 所示. 在 R^3 中考虑方程

$$\begin{cases}\Delta\alpha=-(T\boldsymbol{j})_1,\\ \Delta\beta=-(T\boldsymbol{j})_2,\\ \Delta\gamma=-(T\boldsymbol{j})_3.\end{cases}$$

它有明显的解 $\alpha=\frac{1}{4\pi r}*(T\boldsymbol{j})_1$，$\beta=\frac{1}{4\pi r}*(T\boldsymbol{j})_2$，$\gamma=\frac{1}{4\pi r}*(T\boldsymbol{j})_3$，其中 $r=[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2]^{\frac{1}{2}}$. 记 $\boldsymbol{E}=(\alpha,\beta,\gamma)=\mathscr{A}\boldsymbol{j}$，由 CALDERO'N—ZYGMUND 不等式[4] 知 $\boldsymbol{E}\in[H^2(\Omega)]^3$，且

$$\|\boldsymbol{E}\|_{[H^2(\Omega)]^3}\leqslant C\|T\boldsymbol{j}\|_{[L^2(\Omega)]^3}\leqslant C\|\boldsymbol{j}\|_{[L^2(\Omega)]^3}.$$

因为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi r}*\operatorname{div}\boldsymbol{j}=0,$$

定义 $\boldsymbol{h}=\operatorname{rot}\boldsymbol{E}$，那么 $\boldsymbol{h}\in[H^1(\Omega)]^3$，且

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{h}=\boldsymbol{j}+\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{j},$$

$$\|h\|_{[H^1(\Omega)]^3}=\|\mathrm{rot}\,\mathscr{A}j\|_{[H^1(\Omega)]^3}\leqslant C\|j\|_{[L^2(\Omega)]^3}. \tag{24}$$

这样，我们证明了算子 rot 给出了 $G\to L$ 的同构对应.

若能证明 Φ 是 $[L^2(\Omega)]^3$ 到 $\widetilde{H}^1(\Omega)$ 的连续映照，那么显然我们的定理就成立了. 这是因为 $[H^1(\Omega)]^3\to[L^2(\Omega)]^3$ 的自然嵌入 Γ 是紧致的，$\mathscr{U}$ 是 $[L^2(\Omega)]^3$ 中弱紧集，j 取遍 $\mathscr{U}$ 中元素时，

$$Q=\{H\,|\,H=\Gamma\,\mathrm{rot}\,\mathscr{A}j+\nabla\Phi(\Gamma\,\mathrm{rot}\,\mathscr{A}j)\}$$

是 $[L^2(\Omega)]^3$ 中紧集. 如果我们在状态方程中令 $h=\mathrm{rot}\,\mathscr{A}j$，那么因为 Q 紧，最优控制的存在性已证明. 但是算子 $\mathscr{A}$ 要比 P 有更多的运算量. 故我们在状态方程中用算子 P. 今记

$$k=Pj-\Gamma\,\mathrm{rot}\,\mathscr{A}j,$$

则 $k\in[L^2(\Omega)]^3$，$\mathrm{rot}\,k=0$. 用广义函数中的正则化方法，可以证明存在 $\varphi\in\widetilde{H}_1(\varphi)$，使 $k=\nabla\varphi$. 于是集合 P 与 Q 实际上相同，因此 R 在 $[L^2(\Omega)]^3$ 中紧.

剩下只要证明 Φ 是 $[L^2(\Omega)]^3$ 到 $\widetilde{H}^1(\Omega)$ 中连续映照. 由于 $\widetilde{J}(\varphi)=J(\nabla\varphi+h)$ 在 $\widetilde{H}^1(\Omega)$ 中均匀凸，易证存在 $\alpha>0$ 使

$$J(\nabla\varphi+h_0)-J(\nabla\Phi(h_0)+h_0)\geqslant\alpha\|\varphi-\Phi(h_0)\|^2_{\widetilde{H}^1(\Omega)},\quad h_0\in[L^2(\Omega)]^3. \tag{25}$$

给定 $\varepsilon>0$，若 $\|\varphi-\Phi(h_0)\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)}=\varepsilon$，则

$$J(\nabla\varphi+h_0)-J(\nabla\Phi(h_0)+h_0)\geqslant\alpha\varepsilon^2.$$

因为 $J(H)$ 显然满足局部 Lipschitz 条件，在闭球 $\|H-\nabla\Phi(h_0)-h_0\|\leqslant\varepsilon+1$ 中，设 $J(H)$ 有 Lipschitz 常数 N，使对该球中的 H_1，H_2 有 $|J(H_1)-J(H_2)|\leqslant N\|H_1-H_2\|_{[L^2(\Omega)]^3}$. 我们来证明当

$$\|h-h_0\|\leqslant\max\left\{\frac{\alpha\varepsilon^2}{3N},\ 1\right\} \tag{26}$$

时，$\|\Phi(h)-\Phi(h_0)\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)}\leqslant\varepsilon$. 否则，设有 h_1 适合(26)，但 $\|\Phi(h_1)-\Phi(h_0)\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)}>\varepsilon$. 在 $\nabla\Phi(h_0)$，$\nabla\Phi(h_1)$ 连线的内部必有一点 H_1 使 $\|H_1-\nabla\Phi(h_0)\|_{[L^2(\Omega)]^3}=\varepsilon$，因此

$$J(H_1+h_0)-J(\nabla\Phi(h_0)+h_0)\geqslant\alpha\varepsilon^2.$$

又
$$|J(H_1+h_1)-J(H_1+h_0)|\leqslant\frac{\alpha\varepsilon^2}{3N}\cdot N=\frac{\alpha\varepsilon^2}{3},$$

$$|J(\nabla\Phi(h_0)+h_1)-J(\nabla\Phi(h_1)+h_1)|\leqslant\frac{\alpha\varepsilon^2}{3N}\cdot N=\frac{\alpha\varepsilon^2}{3},$$

故
$$J(H_1+h_1)-J(\nabla\Phi(h_0)+h_1)\geqslant\frac{\alpha\varepsilon^2}{3}>0,$$

又
$$J(H_1+h_1)\geqslant J(\nabla\Phi(h_1)+h_1).$$

但是 H_1 是介于 $\nabla\Phi(h_0)$，$\nabla\Phi(h_1)$ 连线内部的，与 J 凸矛盾. 这样 Φ 的连续性证毕. 定理 3 证毕.

注　i) 不难证明，若 $\dfrac{\partial\mu(x,\xi)}{\partial\xi}$ 有界，那么给定 $B_0\in[L^2(\Omega)]^3$，对目标函数

$$I_1(\nabla\varphi+h)=\|\mu(x,|\nabla\varphi+h|^2)(\nabla\varphi+h)-B_0\|_{[L^2(\Omega)]^3},$$

最优控制也是存在的．因为这时 $\boldsymbol{B}=\mu(x,|\boldsymbol{H}|^2)\boldsymbol{H}$ 是 $[L^2(\Omega)]^3$ 到 $[L^2(\Omega)]^3$ 的连续映照．

ii）设状态空间集合 R 中使泛函 I 取极小值的全体元素是 R_1，R_1 是 R 的闭子集，因而亦是紧集．若 $\mu(x,\xi)=\mu(x)$，即无磁饱和现象，那么 R 还是凸的，R_1 仅含一个点．这时最优控制唯一．

§3．数值计算问题

现在我们来讨论数值计算问题．设 $\{\widetilde{H}^{1,i}(\Omega)\}$ 是一列 $\widetilde{H}^1(\Omega)$ 的有限维子空间，具有以下性质：$\forall u\in\widetilde{H}^1(\Omega)$，存在 $\bar{u}_i\in\widetilde{H}^{1,i}(\Omega)$ 使 $\|u-\bar{u}_i\|\widetilde{H}^1(\Omega)\to 0(i\to\infty)$，这样的 $\widetilde{H}^{1,i}(\Omega)$ 称为 $\widetilde{H}^1(\Omega)$ 的有限元插值空间．我们来解变分问题：

给定 $\boldsymbol{h}\in[L^2(\Omega)]^3$，找出 $u_i\in\widetilde{H}^{1,i}(\Omega)$ 使

$$\widetilde{J}(u_i)=\inf_{v\in\widetilde{H}^{1,i}(\Omega)}\widetilde{J}(v). \tag{27}$$

定理 4　若 $\widetilde{J}(\varphi)$ 是均匀凸泛函，则变分问题(27)的解存在且唯一，且 u_i 强收敛于 u_0，其中 u_0 是变分问题(10)的解．

证　存在性和唯一性是明显的，只要证 u_i 是极小化序列，那么 u_i 强收敛于 u_0 也是明显的了．因为 u_0 是变分问题(10)的解，$u_0\in\widetilde{H}^1(\Omega)$，设 $u_0^i\in\widetilde{H}^{1,i}(\Omega)$ 使得 $\|u_0^i-u_0\|\to 0$．因 $\widetilde{J}(\varphi)$ 适合局部 Lipschitz 条件，故存在常数 $N>0$ 使

$$|\widetilde{J}(u_0^i)-\widetilde{J}(u_0)|\leqslant N\|u_0^i-u_0\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)}.$$

又变分问题(27)的解是 u_i，显然

$$\widetilde{J}(u_0)\leqslant\widetilde{J}(u_i)\leqslant\widetilde{J}(u_0^i).$$

故 $\widetilde{J}(u_i)\to\widetilde{J}(u_0)$，由引理 1，$u_i\xrightarrow{\widetilde{H}^1(\Omega)}u_0$．　　证毕．

定理 4 可以用于边值问题 (7) 的有限元逼近．又因为解算子 $\Phi(\boldsymbol{h})$ 是 $[L^2(\Omega)]^3\to\widetilde{H}^1(\Omega)$ 连续映照，若对 $\boldsymbol{h}$ 作离散插值，则引入状态方程的解中的误差是小的(只要 i 足够大)．

把离散化后的变分问题(27)的解记为 $u_i=\Phi_i(\boldsymbol{h})$，我们提出离散化后的控制问题，称为问题 ($i$)：

找出 $\boldsymbol{j}_i\in\mathscr{U}$ 使对给定的 $\boldsymbol{H}_0\in[L^2(\Omega)]^3$ 有

$$\|\boldsymbol{H}_0-(\nabla\Phi_i(P\boldsymbol{j}_i)+P\boldsymbol{j}_i)\|_{[L^2(\Omega)]^3}\leqslant\inf_{j\in\mathscr{U}}\|\boldsymbol{H}_0-(\nabla\Phi_i(P\boldsymbol{j})+P\boldsymbol{j})\|_{[L^2(\Omega)]^3}+\frac{1}{i}.$$ 显然问题

($\boldsymbol{i}$) 的解是存在的．

定理 5　设 $\mathscr{U}$ 是 $[L^2(\Omega)]^3$ 中紧集．给定 $\varepsilon>0$，存在 $M>0$，当 $i>M$ 时，问题($\boldsymbol{i}$) 的解 $\boldsymbol{j}_i$ 能使

$$\nabla\Phi(P\boldsymbol{j}_i)+P\boldsymbol{j}_i$$

落在 R_1 的 ε 邻域内．

证　记 $\prod_i$ 为 $\widetilde{H}^1(\Omega)$ 到 $\widetilde{H}^{1,i}(\Omega)$ 上的投影算子，对每个 $u\in\widetilde{H}^1(\Omega)$，

$$\|\pi_i u - u\|_{\tilde{H}^1(\Omega)} \to 0 \quad (i \to \infty), \tag{28}$$

若 u 在紧集 $\{\Phi(Pj) \mid j \in \mathscr{U}\}$ 中取值，上式随 $i \to \infty$ 一致收敛于 0. 由于 $\tilde{J}(\varphi)$ 均匀凸，存在 $k_1 > 0$ 使

$$k_1 \|\Phi_i(Pj) - \Phi(Pj)\|^2_{\tilde{H}^1(\Omega)} \leqslant \tilde{J}(\Phi_i(Pj)) - \tilde{J}(\Phi(Pj)),$$

又

$$\begin{aligned}\tilde{J}(\Phi_i(Pj)) - \tilde{J}(\Phi(Pj)) &\leqslant \tilde{J}(\pi_i \Phi(Pj)) - \tilde{J}(\Phi(Pj)) \\ &\leqslant N \|\pi_i \Phi(Pj) - \Phi(Pj)\|_{\tilde{H}^1(\Omega)},\end{aligned}$$

因此对 $j \in \mathscr{U}$ 一致地有 $\|\Phi_i(Pj) - \Phi(Pj)\|_{\tilde{H}^1(\Omega)} \to 0 \quad (i \to \infty)$.

今对 $H \in R / \{R_1$ 的 ε 邻域$\}$，存在 $\delta > 0$ 使

$$\|H - H_0\| \geqslant \min_{H \in R} \|H - H_0\| + \delta.$$

设 $M > 3/\delta$，且 M 取得充分大使 $i > M$ 时

$$\|\Phi_i(Pj) - \Phi(Pj)\|_{\tilde{H}^1(\Omega)} < \delta/3, \quad \forall j \in \mathscr{U},$$

那么显然 $\nabla\Phi(Pj_i) + Pj_i$ 落在 R_1 的 ε 邻域内. 证毕.

若把最优电流集合记为 A，给定 $\varepsilon > 0$，据定理 5 存在 M 使 $i > M$ 时，对 j_i 存在 $j \in A$，使得

$$\|(\nabla\Phi(Pj_i) + Pj_i) - (\nabla\Phi(Pj) + Pj)\|_{[L^2(\Omega)]^3} < \varepsilon.$$

考虑到 $\operatorname{rot} Pj = j$ 以及 rot 是 $[L^2(\Omega)]^3 \to [H^{-1}(\Omega)]^3$ 的线性连续算子，

$$\|j - j_i\|_{[H^{-1}(\Omega)]^3} \leqslant C\varepsilon.$$

即离散化后求得的最优控制电流按 $[H^{-1}(\Omega)]^3$ 范数收敛于 A.

如果 $\mathscr{U}$ 仅是 $[L^2(\Omega)]^3$ 中弱紧集，那么用 $\Gamma\mathscr{A}j$ 代替 Pj，仍可以有与定理 5 同样的结果.

这样，我们将最优控制问题归结为有限维空间的规划问题.

参 考 文 献

[1] R. Glowinski, A. Marrocco, Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, Part 1, Spring-Verlag, 1974, 392.

[2] Lions, J. L. and Magenes, E., Non-Homogeneous Boundary-Value Problems and Applications. Vol. I, Spring-Verlag, New York, 1972.

[3] J. L. Lions, Contrôle Optimal de Systèmes Gouvernés par des Equations aux Dérivées Partielles, Dunod Paris, 1968.

[4] L. Bers, F. John and M. Schechter, Partial Differential Equations, New York-London-Sydney, 1964.

[5] J. T. ODEN and J. N. REDDY, An Introduction to Matnematical Theory of Finite Elements, New York-London-Sydney-Toronto, 1976.

THE ANALYSIS AND CONTROL OF SATURATE STATIC MAGNETIC FIELDS

Lin Xiao-biao

Abstract

We consider two basic problems in the analysis of static magnetic fields. 1) Find the distribution of a magnetic field when the distribution of the electric current is given. 2) Given the distribution of a magnetic field, find the distribution of the electric current in the set of admissible distributions such that the corresponding magnetic field is closest to the given one.

Since $\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}$, we set $\boldsymbol{H}=\nabla\varphi+\boldsymbol{h}$, where $\boldsymbol{h}$ is any solution of the equation rot $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{j}$. we calculate the static magnetic field by solving the boundary value Problem: Find $\varphi\in H^1(\Omega)$ such that

$$\begin{cases}\operatorname{div}[\mu(x,|\nabla\varphi+\boldsymbol{h}|^2)(\nabla\varphi+\boldsymbol{h})]=0 \quad x\in\Omega, & (1)\\ \mu(x,|\nabla\varphi+\boldsymbol{h}|^2)(\nabla\varphi+\boldsymbol{h})\cdot\boldsymbol{n}=0 \quad x\in\partial\Omega, & (2)\\ \int_\Omega \varphi dx=0, & (3)\end{cases}$$

where $\boldsymbol{h}\in[L^2(\Omega)]^3$ is given.

In the first part of this paper, we prove, by variational method, that if B is a strictly increasing function of H, the solution of the boundary value problem exists and is unique and that if $dB/dH\geqslant\varepsilon>0$, the sequence of approximate solutions strongly converges to the real solution.

The second part of this paper treats of the inverse problem, i.e., the control problem. Let $\mathscr{U}$ be a closed, convex, bounded set in $[L^2(\Omega)]^3$, such that $\boldsymbol{j}\in\mathscr{U}$ implies div $\boldsymbol{j}=0$. $\mathscr{U}$ is called the set of admissible controls. The state equations are (1)~(3). The cost functional is

$$I(\nabla\varphi+\boldsymbol{h})=\|\nabla\varphi+\boldsymbol{h}-\boldsymbol{H}_0\|_{[L^2(\Omega)]^3},$$

where $\boldsymbol{H}_0\in[L^2(\Omega)]^3$ is given.

Extending $\boldsymbol{j}\in\mathscr{U}$ to $[L^2(\Omega)]^3$ linearly and continuously and considering a set of auxiliary Laplace equations, we discuss the operator rot: $[H^1(\Omega)]^3\to[L^2(\Omega)]^3$ in detail. Let N_0 be the null space of rot. The operator rot induces an isomorphic mapping: $[H^1(\Omega)]^3/N_0\to[L^2(\Omega)]^3$. Besides, by using the coercive inequality, we prove that the solution $\Phi(h)$ of equations (1)~(3) is a continuous mapping: $[L^2(\Omega)]^3\to H^1(\Omega)$. Hence, the Cobolev embedding theorem ensures the existence of the optimal control.

By the finite elements method, numerical approximation of the boundary value problem and control problem are discussed in the last part of the paper. It is shown that the approximate solutions of the boundary value problem strongly converge to the real solution and that the control problem can be separated into optimization problems in the finite-dimensional spaces.